結合型評価をもつ相互依存型決定過程 (不確実・不確定環境下における数理的意思決定とその周辺)

藤田, 敏治

数理解析研究所講究録
第1802巻 2012年 78-84

結合型評価をもつ相互依存型決定過程

九州工業大学・大学院工学研究院　藤田 敏治 (Toshiharu Fujita)
Graduate School of Engineering,
Kyushu Institute of Technology

1　はじめに

相互依存型決定過程とは，2種類の決定過程が，その利得関数を通して互いに依存するものである ([2])．一方の決定過程問題の利得関数は，他方の決定過程問題の最適値もしくはその関数として定まる．相互依存型決定過程は、ある種の複雑な再帰的関係が潜む問題を扱う際に有効な手段となる。本研究では，評価関数を，より幅広い問題に対応できるように拡張し，動的計画法による再帰式を導く．また，ある多角形からの多面体構成問題が，相互依存型決定過程として定式化されることを示す．

2　主決定過程と副決定過程

相互依存型決定過程を構成する2つの決定過程を主決定過程と副決定過程と呼ぶ．まず，主決定過程を定める．ただし，以下 $\mathbf{R}$ は実数全体を表すものとする．

(1) X は有限状態空間，$T_X \subset X$ は終了状態集合
(2) U は有限決定空間，$U(x)$ は $x \in X$ に対し選択可能な決定全体
(3) $f_{XX} : X \times U \to X$ は確定的推移法則
(4) $r : X \times U \to \mathbf{R}$ は利得関数，$r_G : X \to \mathbf{R}$ は終端利得関数
(5) $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は効用関数
(6) $D \subset \mathbf{R}$ に対し $\circ : D \times D \to D$ は結合律を満たす2項演算子で単位元 $\tilde{\lambda}$ をもつ

とし，初期状態 $x_0 \in X \backslash T_X$ に対する次の決定過程を考える．

主決定過程

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{P}(x_0) & \text{Maximize} & g\Big(r(x_0,u_0)\circ r(x_1,u_1)\circ\cdots\circ r(x_{N-1},u_{N-1})\circ r_G(x_N)\Big) \\
& \text{subject to} & x_{n+1} = f_{XX}(x_n,u_n) \quad n=0,1,\ldots,N-1 \\
& & u_n \in U(x_n) \quad n=0,1,\ldots,N-1 \\
& & N = N(x_0,u_0,x_1,u_1,\ldots) = \max\{n : x_n \notin T_X\}+1
\end{array}
$$

次に，副決定過程を定める．

(1') Y は有限状態空間，$T_Y \subset Y$ は終了状態集合
(2') V は有限決定空間，$V(y)$ は $y \in Y$ に対し選択可能な決定全体
(3') $f_{YY} : Y \times V \to Y$ は確定的推移法則
(4') $q : Y \times V \to \mathbf{R}$ は利得関数，$q_G : Y \to \mathbf{R}$ は終端利得関数

(5') $h : X \times U \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は効用関数

(6') $D' \subset \mathbf{R}$ に対し $\bullet : D' \times D' \to D'$ は結合律を満たす2項演算子で単位元 $\tilde{\mu}$ をもつ

とし，状態空間 X から Y への確定的推移：

$$f_{XY} : X \times U \to Y$$

を与える．このとき，$(x,u) \in X \times U$ に対し，$f_{XY}(x,u) \notin T_Y$ のとき，初期状態 $y_0 = f_{XY}(x,u)$ をもつ次の決定過程を考える．

副決定過程

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Q}(x,u) & \text{Maximize} & h\Big(x,u,\ q(y_0,v_0) \bullet q(y_1,v_1) \bullet \cdots \bullet q(y_{M-1},v_{M-1}) \bullet q_G(y_M)\Big) \\ & \text{subject to} & y_0 = f_{XY}(x,u) \\ & & y_{n+1} = f_{YY}(y_n,v_n) \quad n = 0,1,\ldots,M-1 \\ & & v_n \in V(y_n) \quad n = 0,1,\ldots,N-1 \\ & & M = M(y_0,v_0,y_1,v_1,\ldots) = \max\{n : y_n \notin T_Y\} + 1 \end{array}$$

さらに状態空間 Y から X への確定的推移：

$$f_{YX} : Y \times V \to X$$

が与えられ，主決定過程の利得関数 $r(x,u)$ および副決定過程の利得関数 $q(y,v)$ は，$\mathrm{Q}(x,u), \mathrm{P}(f_{YX}(y,v))$ の最適値の関数としてそれぞれ次のように定まるものとする．

$$r(x,u) = \begin{cases} R\Big(x,u,\ h\big(x,u,\ q_G(y_0)\big)\Big) & y_0 = f_{XY}(x,u) \in T_Y \\ R\Big(x,u,\ \displaystyle\max_{\substack{v_n \in V(y_n) \\ n=0,1,\ldots,M-1}} h\big(x,u,\ q(y_0,v_0) \bullet q(y_1,v_1) \bullet \cdots \bullet q_G(y_M)\big)\Big) & \\ & y_0 = f_{XY}(x,u) \notin T_Y \end{cases}$$

$$q(y,v) = \begin{cases} Q\Big(y,v,\ g\big(r_G(x_0)\big)\Big) & x_0 = f_{YX}(y,v) \in T_X \\ Q\Big(y,v,\ \displaystyle\max_{\substack{u_n \in U(x_n) \\ n=0,1,\ldots,N-1}} g\big(r(x_0,u_0) \circ r(x_1,u_1) \circ \cdots \circ r_G(x_N)\big)\Big) & \\ & x_0 = f_{YX}(y,v) \notin T_X \end{cases}$$

このとき，解くべき問題は初期状態 $\overline{x}_0 \in X \backslash T_X$ に対する主決定過程問題であり，これを (P, Q, $\overline{x}_0$) と表す．ただし，両過程を通して有限段での終了を仮定する．

3 再帰式

主決定過程 $\mathrm{P}(x_0)$ と副決定過程 $\mathrm{Q}(x,u)$ にそれぞれパラメータ λ, $\mu \in \mathbf{R}$ を導入した次の埋め込み問題を考え，その最適値を関数 W および Z_{xu} で表す：

$$\begin{aligned} W(x_0,\lambda) &= g\big(\lambda \circ r_G(x_0)\big) & x_0 \in T_X \\ W(x_0,\lambda) &= \max_{\substack{x_{n+1} = f_{XX}(x_n,u_n) \\ u_n \in U(x_n) \\ n=0,1,\ldots,n-1}} g\big(\lambda \circ r(x_0,u_0) \circ r(x_1,u_1) \circ \cdots \circ r_G(x_n)\big) & x_0 \notin T_X \end{aligned}$$

$$Z_{xu}(y_0,\mu) = h\Big(x,u,\ \mu\bullet q_G(y_0)\Big) \qquad y_0\in T_Y$$

$$Z_{xu}(y_0,\mu) = \max_{\substack{y_{n+1}=f_{YY}(y_n,v_n)\\ v_n\in V(y_n)\\ n=0,1,\dots,m-1}} h\Big(x,u,\ \mu\bullet q(y_0,v_0)\bullet q(y_1,v_1)\bullet\cdots\bullet q_G(y_m)\Big) \qquad y_0\notin T_Y$$

$W(x_0,\tilde\lambda)$, $Z_{xu}(f_{XY}(x,u),\tilde\mu)$ が，それぞれ主過程 $\mathrm{P}(x_0)$ および副過程 $\mathrm{Q}(x,u)$ の最適値を表す。このとき，W, Z_{xu} に対して，それぞれ次の再帰式が成り立つ ([3]).

$$W(x,\lambda) = g\Big(\lambda\circ r_G(x)\Big) \qquad x\in T_X,\ \ \lambda\in\mathbf{R}$$

$$W(x,\lambda) = \max_{u\in U(x)} W\Big(f_{XX}(x,u),\ \lambda\circ r(x,u)\Big) \qquad x\notin T_X,\ \ \lambda\in\mathbf{R}$$

$$Z_{xu}(y,\mu) = h\Big(x,u,\ \mu\bullet q_G(y)\Big) \qquad y\in T_Y,\ \ \mu\in\mathbf{R}$$

$$Z_{xu}(y,\mu) = \max_{v\in V(y)} Z_{xu}\Big(f_{YY}(y,v),\ \mu\bullet q(y,v)\Big) \qquad y\notin T_Y,\ \ \mu\in\mathbf{R}$$

さらに，$\circ$, $\bullet$ の単位元 $\tilde\lambda$, $\tilde\mu$ を用いると

$$r(x,u) = R\Big(x,u,\ Z_{xu}(f_{XY}(x,u),\ \tilde\mu)\Big)$$

$$q(y,v) = Q\Big(y,v,\ W(f_{YX}(y,v),\ \tilde\lambda)\Big)$$

が成り立つ。これより，次の相互依存型再帰式を得る.

定理 3.1

$$W(x,\lambda) = g\Big(\lambda\circ r_G(x)\Big) \qquad x\in T_X,\ \ \lambda\in\mathbf{R}$$

$$W(x,\lambda) = \max_{u\in U(x)} W\Big(f_{XX}(x,u),\ \lambda\circ R\Big(x,u,\ Z_{xu}(f_{XY}(x,u),\ \tilde\mu)\Big)\Big) \qquad x\notin T_X,\ \ \lambda\in\mathbf{R}$$

$$Z_{xu}(y,\mu) = h\Big(x,u,\ \mu\bullet q_G(y)\Big) \qquad y\in T_Y,\ \ \mu\in\mathbf{R}$$

$$Z_{xu}(y,\mu) = \max_{v\in V(y)} Z_{xu}\Big(f_{YY}(n,v),\ \mu\bullet Q\Big(y,u,\ W(f_{YZ}(y,v),\ \tilde\lambda)\Big)\Big) \qquad y\notin T_Y,\ \ \mu\in\mathbf{R}$$

解くべき問題 (P, Q, $\overline{x}_0$) の最適値は $W(\overline{x}_0,\tilde\lambda)$ である.

なお，最適値 $W(x,\lambda)$ $(x\in T_X)$ を与える決定を $\pi^*_X(x,\lambda)$，最適値 $Z_{xu}(y,\mu)$ $(y\notin T_Y)$ を与える決定を $\pi^*_Y(y,\mu)$ とおくとき，(π^*_X,π^*_Y) が問題 (P, Q, $\overline{x}_0$) に対するパラメーター付最適政策を与える.

また，特に h が関数 $h':\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $\nu: X\times U\to\mathbf{R}$ を用いて

$$h(x,u,q) = h'(\nu(x,u)\bullet q)$$

で表されるとき，相互依存型再帰式は次で与えられる.

系 3.1

$$W(x,\lambda) = g\Big(\lambda \circ r_G(x)\Big) \qquad x \in T_X,\ \ \lambda \in \mathbf{R}$$

$$W(x,\lambda) = \max_{u\in U(x)} W\Big(f_{XX}(x,u),\ \lambda \circ R\Big(x,u,\ Z(f_{XY}(x,u),\ \nu(x,u))\Big)\Big) \qquad x \notin T_X,\ \ \lambda \in \mathbf{R}$$

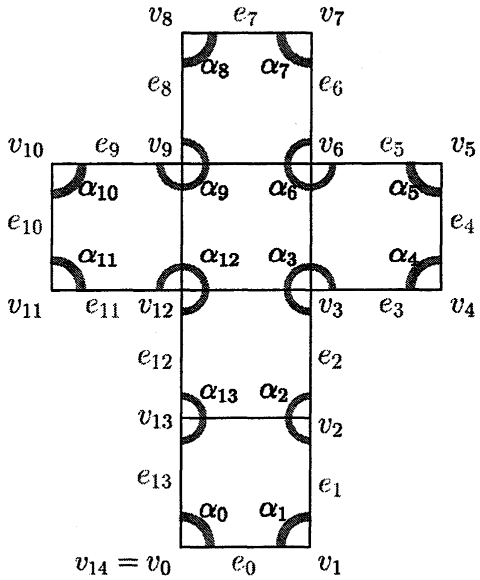
$$Z(y,\mu) = h'\Big(\mu \bullet q_G(y)\Big) \qquad y \in T_Y,\ \ \mu \in \mathbf{R}$$

$$Z(y,\mu) = \max_{v\in V(y)} Z\Big(f_{YY}(n,v),\ \mu \bullet Q\Big(y,u,\ W(f_{YX}(y,v),\ \tilde{\lambda})\Big)\Big) \qquad y \notin T_Y,\ \ \mu \in \mathbf{R}$$

4 適用例

立方体の展開図 (図 1) から，立方体以外の凸多面体ができるか，という問題を考える．ここで考える問題は A. Lubiw and J. O'Rourke の [4] で扱われている問題である．彼らは，この問題に対し動的計画法による再帰式らしきものを与えて解いていたが，それが実際にどのような動的計画問題であるかについての言及はなかった．本節では，彼らの導いた再帰的関係式がここで述べている相互依存型決定過程によるものと本質的に同じであることを以下に示す．ただし，考え方は彼らのものに沿っているが，得られる再帰式は見かけ上かなり異なったものとなっている．

図 1: 立方体の展開図



まず，展開図において立方体の頂点・辺に対応する部分をそれぞれ図 1 のように $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{13}$ および $e_0, e_1, e_2, \ldots, e_{13}$ とおく．さらに，各頂点 v_i に対応する角の大きさを α_i とおく．このとき，凸多面体になるための条件を考えながら辺と辺の可能な組合せを考える．

相互依存型決定過程における状態空間 X, Y は共通にとられ，以下で定義される．

$$X = Y = \{(i,j,I) \mid i,j = 0,1,\ldots,14,\ I \subset \{0,1,\ldots,13\}\ \}$$

状態 $(i,j,I) \in X$ は，組合せが未決定の連続する辺を構成する頂点集合 $\{v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j\}$ および，この状態以前に頂点 v_i に集まった角 α_i のインデックス集合 I をあらわす．よって，初期状態は $\overline{x}_0 = (0, 14, \phi)$ である．ただし，頂点 v_{14} は頂点 v_0 と同じ頂点をあわらし，便宜上の表現として加えている．

また，終了状態集合も $T_X = T_Y = T$ と共通にとられ

$$T = \{(i,j,I) \in X \mid i = j\} \subset X = Y$$

で与えられる．すなわち，考慮すべき辺がなくなった時が終了期である．

次に，決定空間は

$$U = \{(a,b) \,|\, 0 \le a < b \le 13,\ b-a = 2n+1 (n=0,1,2,\ldots)\}$$

で，決定 (a,b) は，辺 e_a と e_b を重ね合わせることをあらわし，条件式 $b-a=2n+1$ は重ね合わせる辺の間にある辺の数は偶数 $(0,2,4,\ldots)$ でなければならないことをあらわす．なお，状態 (i,j,I) に対する可能決定集合は

$$U(i,j,I) = V(i,j,I) = \{(i,b) \in U \,|\, i < b < j\} \quad (i,j,I) \in X = Y$$

ととる．これは対象とする頂点間の辺のなかで，最も若い番号の辺とどの辺を重ね合わせるかをあらわす決定の集合である．

確定的状態推移は $f_{XX} = f_{YX} = f_1$ および $f_{XY} = f_{YY} = f_2$ で与えられ，現状態 $(i,j,I) \in X \backslash T$ と決定 $(a,b) \in U(i,j,I)$ に対し，次で定められる（注：可能決定集合の定義より $i=a$ が成り立つ）．

$$\begin{aligned} f_1((i,j,I),\ (a,b)) &= (a+1,b,\phi) \\ f_2((i,j,I),\ (a,b)) &= \begin{cases} (b+1,j,I\cup\{i,j\}) & b \ne j-1 \\ (i,a,I\cup\{i,j\}) & b = j-1 \end{cases} \end{aligned}$$

ただし，f_2 における I の更新時，要素 14 は 0 と同一視する（同一の頂点をあらわすため）．

状態 $f_1((i,j,I),\ (a,b))$ は，辺 e_a を e_b に重ね合わせた際の，いわゆる前半の残りを現す頂点集合に対応し，$f_2((i,j,I)$ は後半のそれに対応する．この際，角 α_i, α_j は後半に位置し，必ず（重ね合わせの結果）同一頂点となる $v_i = v_{b+1}$ に集まる．これがインデックス集合 I の更新に反映されている．

さらに，

$$c(i,j,I) \;=\; \sum_{k\in\{i,j\}\cap I^c} \alpha_k$$

とする．ただし，ここでも $\{i,j\}\cap I^c$ における 0 と 14 は同一視し，I の補集合については

$$I^c = \{0,1,\ldots,13\}\backslash I$$

とする．また $i=j$ の時 $\displaystyle\sum_{k\in\{i,j\}\cap I^c}$ は $\displaystyle\sum_{k\in\{i\}\cap I^c}$ を意味するものとし，もし $\displaystyle\sum_{k\in\phi}$ となった時の値は 0 とする．この $c(i,j,I)$ を用いて，終端利得関数を

$$\begin{aligned} r_G(i,j,I) &= I_{[0,2\pi]^c}(c(i,j,I)) \ (\ = I_{[0,2\pi]^c}(\alpha_i) = 0 \ ) \\ q_G(i,j,I) &= c(i,j,I) \ (\ = \alpha_i \ ) \end{aligned}$$

と定める．

このとき，解くべき問題は初期状態 $\overline{x}_0 = (0,14,\phi)$ に対する主決定過程問題

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(x_0) & \text{Minimize} & r(x_0,u_0) \vee r(x_1,u_1) \vee \cdots \vee r(x_{M-1},u_{M-1}) \vee r_G(x_M) \\ & \text{subject to} & x_{n+1} = f_1(x_n,u_n) \quad n=0,1,\ldots,N-1 \\ & & u_n \in U(x_n) \quad n=0,1,\ldots,N-1 \\ & & N = N(x_0,u_0,x_1,u_1,\ldots) \end{array}$$

で与えられ，副決定過程問題は

$$
\begin{array}{lll}
Q(x,u) & \text{Minimize} & I_{[0,2\pi]^c}\Big[c(x)+q(x_0,u_0)+q(x_1,u_1)+\cdots+q(x_{M-1},u_{M-1})+q_G(x_M)\Big] \\
 & \text{subject to} & x_0 = f_2(x,u) \\
 & & x_{n+1} = f_Y(x_n,u_n) \quad n=0,1,\ldots,M-1 \\
 & & u_n \in U(x_n) \quad n=0,1,\ldots,N-1 \\
 & & M = M(x_0,u_0,x_1,u_1,\ldots)
\end{array}
$$

となる．ただし，$x_0 = f_2(x,u) \notin T$ に対し

$$
r(x,u) \;=\; \min_{x_{n+1}=f_2(x_n,u_n),u_n\in U(x_n)} I_{[0,2\pi]^c}\Big[c(x)+q(y_0,v_0)+q(y_1,v_1)+\cdots+q_G(y_M)\Big]
$$

であり，また K を $K>2\pi$ なる定数とおき，$x_0 = f_1(x,u) \notin T$ に対し

$$
q(x,u) \;=\; c(x)\vee\Big(K\times\min_{x_{n+1}=f_1(x_n,u_n),u_n\in U(x_n)}\Big[r(x_0,u_0)\vee r(x_1,u_1)\vee\cdots\vee r_G(x_N)\Big]\Big)
$$

である．

なお，3節のモデルとは

$$
\begin{aligned}
R(x,u,q) &= q \\
Q(x,u,r) &= c(x)\vee(K\times r) \\
h(x,u,q) &= I_{[0,2\pi]^c}\Big[c(x)+q\Big] \\
g(x,u,r) &= r
\end{aligned}
$$

と対応する．

この問題に対しては，副決定過程にのみ埋め込みが必要となり，再帰式は

$$
\begin{aligned}
W(x) &= r_G(x) & x\in T \\
W(x) &= \min_{u\in U(x)}\Big[Z\Big(f_2(x,u),\ c(x)\Big)\vee W(f_1(x,u))\Big] & x\notin T
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Z(x,\mu) &= I_{[0,2\pi]^c}\Big(\mu+q_G(x)\Big) & x\in T,\ \ \mu\in\mathbf{R} \\
Z(x,\mu) &= \min_{u\in U(x)} Z\Big(f_2(x,u),\ \mu+\Big[c(x)\vee\{K\times W(f_1(x,u))\}\Big]\Big) & x\notin T,\ \ \mu\in\mathbf{R}
\end{aligned}
$$

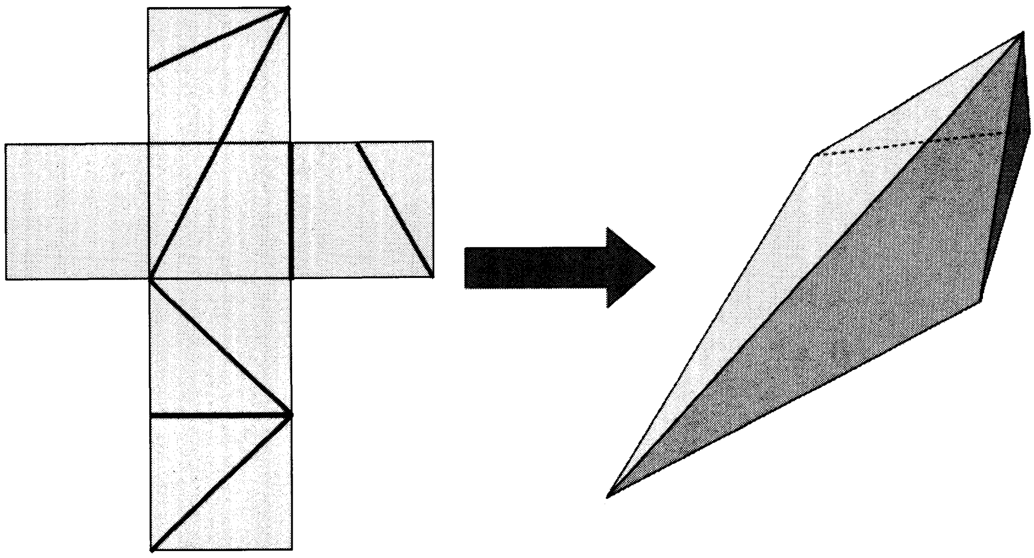
で与えられる．

求める最適値は $W(0,14,\phi)$ であり，その値が 0 のとき，凸多面体は構成可能となり，最適政策が辺の組み合わせ方を与える．多面体の構成例として図 2 に 5 面体を構成するための折り目を示す．このほかに、立方体はもちろん４面体・８面体（・２面体）を作成することができる。なお、再帰式を解いて得られるものは辺の組み合わせ方である。折り目については辺の組み合わせ方をもとに、実際に作成して求めている。

References

[1] U. Bertelé and F. Brioschi, Nonserial Dynamic Programming, Academic Press, New York, 1972

図 2: 5 面体



[2] T. Fujita, 相互依存型決定過程について — 評価系の拡張 —. 日本数学会 2011 年度秋季総合分科会統計数学分科会講演アブストラクト集, 79-80, 2011

[3] S. Iwamoto, T. Ueno and T. Fujita, Controlled Markov Chains with Utility Functions, Ed. H. Zhenting, J. A. Filar and A. Chen, Markov Processes and Controlled Markov Chains, Chap.8, 135-148, Kluwer, 2002

[4] A. Lubiw and J. O'Rourke, When can a polygon fold to a polytope?, Technical Report 048, Smith College, 1996

[5] G. L. Nemhauser, Introduction to Dynamic Programming, Wiley, New York, 1966

[6] J. O'Rourke, How to Fold It, Cambridge Univ. Press, 2011